

آزمون‌های میثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

# موج آزمون ریاضے

ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



رشته  
ریاضی

انتگرالگو

## پیشگفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواری‌اش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دوره متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایه پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، کتاب سه‌بعدی شامل درسنامه مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کتاب تست شامل درسنامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. معلوم است که تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای کتاب‌های تست، نسبت به کتاب‌های سه‌بعدی بسیار بیشتر است. همچنین دانش‌آموزانی که مایل‌اند همزمان با یادگیری مباحث درس حسابان ۲ سال دوازدهم، مطالب دروس ریاضی ۱ و حسابان ۱ را مرور کنند، می‌توانند از کتاب **ریاضیات جامع رشته ریاضی** استفاده کنند. این کتاب شامل درسنامه کامل و تست‌های جامع و متنوع هر سه درس است.

کتاب‌های **موج آزمون ویژه آمادگی** برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های ریاضی ۱ سال دهم، حسابان ۱ سال یازدهم و حسابان ۲ سال دوازدهم است. در این کتاب همه مباحث این درس‌ها را در دوازده فصل تنظیم کرده‌ایم. در هر آزمون، ده پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث، بیش از یکی باشد. در انتهای هر فصل، به جز فصل‌های (۱)، (۳) و (۷)، یک یا چند آزمون جامع مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. فصل سیزدهم را به آزمون‌هایی برای آمادگی آزمون‌های آزمایشی (قلم‌چی) اختصاص داده‌ایم. در هر آزمون این فصل متناسب با مباحث مشخص شده آن، پرسش‌های چهارگزینه‌ای آورده‌ایم. اگر می‌خواهید برای هر یک از این آزمون‌ها بیشتر تمرین کنید، می‌توانید به آزمون‌های مرتبط با مباحث آن که در جدول زیر مشخص شده‌اند مراجعه کنید.

آزمون‌های مرتبط	
آزمون اول قلم‌چی	۳۷- ۳۸- ۳۹- ۵۵- ۵۶- ۵۷- ۵۸- ۵۹- ۶۰- ۶۶- ۶۷
آزمون دوم قلم‌چی	۶۶- ۶۷- ۶۸- ۶۹- ۷۰- ۷۱- ۷۲- ۷۳
آزمون سوم قلم‌چی	۱۸- ۶۱- ۶۲- ۶۳- ۶۴- ۶۵- ۶۶- ۶۷- ۶۹- ۷۰
آزمون چهارم قلم‌چی	۱- ۲- ۳- ۴- ۵- ۶- ۷- ۸- ۹- ۱۰- ۱۱- ۱۲- ۱۳- ۱۴- ۱۵- ۱۶- ۱۷- ۱۷- ۷۶- ۷۷- ۷۸- ۷۹- ۸۰- ۸۱- ۸۲- ۹۰- ۹۱
آزمون پنجم قلم‌چی	۱۸- ۶۶- ۶۷- ۶۹- ۷۰- ۸۳- ۸۴- ۸۵- ۸۶- ۸۷- ۸۸- ۸۹- ۹۰- ۹۱- ۹۲- ۹۳- ۹۴
آزمون ششم قلم‌چی	۱۹- ۲۰- ۲۱- ۲۲- ۲۳- ۲۶- ۲۷- ۳۰- ۳۴- ۳۵- ۵۷- ۵۸- ۸۸- ۸۹- ۹۰- ۹۱- ۹۲- ۹۳- ۹۴- ۹۹- ۱۰۰- ۱۰۱- ۱۰۲- ۱۰۳- ۱۰۴- ۱۰۵- ۱۰۶- ۱۰۷- ۱۰۸- ۱۰۹
آزمون هفتم قلم‌چی	۱۸- ۶۶- ۶۷- ۶۹- ۷۰- ۸۸- ۸۹- ۹۰- ۹۱- ۹۲- ۹۳- ۹۴- ۱۰۷- ۱۰۸- ۱۰۹- ۱۱۰- ۱۱۱- ۱۱۲
آزمون هشتم قلم‌چی	۱- ۲- ۳- ۴- ۵- ۶- ۷- ۸- ۹- ۱۰- ۱۱- ۱۲- ۱۳- ۱۴- ۱۵- ۱۶- ۱۷- ۱۹- ۲۰- ۲۱- ۲۲- ۲۳- ۲۶- ۲۷- ۳۰- ۳۴- ۳۵- ۳۷- ۳۸- ۳۹- ۵۵- ۵۶- ۵۷- ۵۸- ۵۹- ۶۰- ۶۱- ۶۲- ۶۳- ۶۴- ۶۵- ۶۸- ۷۱- ۷۲- ۷۳
آزمون نهم قلم‌چی	۲۴- ۲۵- ۲۸- ۲۹- ۳۰- ۳۳- ۳۴- ۳۵- ۳۶- ۵۳- ۵۴- ۱۱۶- ۱۱۷
آزمون دهم قلم‌چی	۴۱- ۴۲- ۴۳- ۴۴- ۴۵- ۴۶- ۴۷- ۴۸- ۴۹- ۵۰- ۵۱- ۵۲- ۱۱۶- ۱۱۷- ۱۱۸- ۱۱۹- ۱۲۰- ۱۲۱- ۱۲۲- ۱۲۳- ۱۲۴- ۱۲۵- ۱۲۷- ۱۲۸
آزمون یازدهم قلم‌چی	۱۱۶- ۱۱۷- ۱۱۸- ۱۱۹- ۱۲۰- ۱۲۱- ۱۲۲- ۱۲۳- ۱۲۴- ۱۲۵- ۱۲۶- ۱۲۷- ۱۲۸- ۱۳۱- ۱۳۲- ۱۳۳- ۱۳۴- ۱۳۵

آزمون‌های مرتبط	
۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶	آزمون دوازدهم قلم‌چی
۱۸ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲	آزمون سیزدهم قلم‌چی
۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴	آزمون چهاردهم قلم‌چی
۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۵۷ - ۵۸ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴	آزمون پانزدهم قلم‌چی
۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴	آزمون شانزدهم قلم‌چی

در جدول زیر آزمون‌های مرتبط با مباحث آزمون‌های آزمایشی گزینه دو را آورده‌ایم.

آزمون‌های مرتبط	
۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳	آزمون اول گزینه دو
۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰	آزمون دوم گزینه دو
۱۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۹۰ - ۹۱	آزمون سوم گزینه دو
۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴	آزمون چهارم گزینه دو
۱۸ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲	آزمون پنجم گزینه دو
۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲ - ۱۱۳ - ۱۱۴ - ۱۱۵ - ۱۱۶ - ۱۱۷	آزمون ششم گزینه دو
۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۵۳ - ۵۴ - ۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵	آزمون هفتم گزینه دو
۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴	آزمون هشتم گزینه دو
۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶	آزمون نهم گزینه دو
۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۶۰ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲	آزمون دهم گزینه دو
۸ - ۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۸ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴	آزمون یازدهم گزینه دو

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آفانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

**مؤلفان**

## ● فصل اول: بازه و مجموعه

آزمون ۱: مجموعه‌های اعداد ..... ۲

آزمون ۲: مجموعه‌ها ..... ۳

## ● فصل دوم: الگو و دنباله

آزمون ۳: الگو و دنباله ..... ۴

آزمون ۴: دنباله حسابی (۱) ..... ۵

آزمون ۵: دنباله حسابی (۲) ..... ۶

آزمون ۶: دنباله هندسی (۱) ..... ۷

آزمون ۷: دنباله هندسی (۲) ..... ۸

آزمون ۸: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۱) ..... ۹

آزمون ۹: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۲) ..... ۱۰

آزمون ۱۰: آزمون فصل دوم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..... ۱۱

آزمون ۱۱: آزمون فصل دوم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..... ۱۲

## ● فصل سوم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

آزمون ۱۲: توان و ریشه ..... ۱۳

آزمون ۱۳: اتحاد (۱) ..... ۱۴

آزمون ۱۴: اتحاد (۲) ..... ۱۵

آزمون ۱۵: تجزیه (۱) ..... ۱۶

آزمون ۱۶: تجزیه (۲) ..... ۱۷

آزمون ۱۷: گویا کردن مخرج‌های گنگ ..... ۱۸

آزمون ۱۸: بخش‌پذیری و تقسیم ..... ۱۹

## ● فصل چهارم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

آزمون ۱۹: حل معادلهٔ درجهٔ دوم ..... ۲۰

آزمون ۲۰: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ

دوم (۱) ..... ۲۱

آزمون ۲۱: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ

دوم (۲) ..... ۲۲

آزمون ۲۲: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ

درجهٔ دوم ..... ۲۳

آزمون ۲۳: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص ..... ۲۴

آزمون ۲۴: معادله‌های گویا (۱) ..... ۲۵

آزمون ۲۵: معادله‌های گویا (۲) ..... ۲۶

آزمون ۲۶: تعیین علامت و نامعادله (۱) ..... ۲۷

آزمون ۲۷: تعیین علامت و نامعادله (۲) ..... ۲۸

آزمون ۲۸: معادله‌های گنگ (۱) ..... ۲۹

آزمون ۲۹: معادله‌های گنگ (۲) ..... ۳۰

آزمون ۳۰: حل هندسی معادلات ..... ۳۱

آزمون ۳۱: آزمون فصل چهارم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..... ۳۲

آزمون ۳۲: آزمون فصل چهارم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..... ۳۳

## ● فصل پنجم: قدرمطلق و جزء صحیح

آزمون ۳۳: قدرمطلق و ویژگی‌های آن ..... ۳۴

آزمون ۳۴: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (۱) ..... ۳۵

آزمون ۳۵: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (۲) ..... ۳۶

آزمون ۳۶: توابع شامل قدرمطلق ..... ۳۷

آزمون ۳۷: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۱) ..... ۳۸

آزمون ۳۸: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۲) ..... ۳۹

آزمون ۳۹: تابع جزء صحیح ..... ۴۰

آزمون ۴۰: آزمون فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..... ۴۱

## ● فصل ششم: توابع نمایی و لگاریتمی

آزمون ۴۱: تابع نمایی (۱) ..... ۴۲

آزمون ۴۲: تابع نمایی (۲) ..... ۴۳

- آزمون ۶۹: توابع یکنوا (۱) ..... ۷۲
- آزمون ۷۰: توابع یکنوا (۲) ..... ۷۳
- آزمون ۷۱: تابع وارون (۱) ..... ۷۴
- آزمون ۷۲: تابع وارون (۲) ..... ۷۵
- آزمون ۷۳: تابع وارون (۳) ..... ۷۶
- آزمون ۷۴: آزمون فصل هشتم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) .. ۷۷
- آزمون ۷۵: آزمون فصل هشتم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) .. ۷۸

### ● فصل نهم: مثلثات

- آزمون ۷۶: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه ..... ۷۹
- آزمون ۷۷: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی ..... ۸۰
- آزمون ۷۸: اتحادهای مثلثاتی (۱) ..... ۸۱
- آزمون ۷۹: اتحادهای مثلثاتی (۲) ..... ۸۲
- آزمون ۸۰: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ..... ۸۳
- آزمون ۸۱: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱) ..... ۸۴
- آزمون ۸۲: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲) ..... ۸۵
- آزمون ۸۳: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱) ..... ۸۶
- آزمون ۸۴: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲) ..... ۸۷
- آزمون ۸۵: سینوس و کسینوس زاویهٔ  $2\alpha$  (۱) ..... ۸۸
- آزمون ۸۶: سینوس و کسینوس زاویهٔ  $2\alpha$  (۲) ..... ۸۹
- آزمون ۸۷: سینوس و کسینوس زاویهٔ  $2\alpha$  (۳) ..... ۹۰
- آزمون ۸۸: تانژانت مجموع دو زاویه (۱) ..... ۹۱
- آزمون ۸۹: تانژانت مجموع دو زاویه (۲) ..... ۹۲
- آزمون ۹۰: توابع مثلثاتی (۱) ..... ۹۳
- آزمون ۹۱: توابع مثلثاتی (۲) ..... ۹۴
- آزمون ۹۲: معادلات مثلثاتی (۱) ..... ۹۵
- آزمون ۹۳: معادلات مثلثاتی (۲) ..... ۹۶
- آزمون ۹۴: معادلات مثلثاتی (۳) ..... ۹۷

- آزمون ۴۳: معادلات و نامعادلات نمایی (۱) ..... ۴۴
- آزمون ۴۴: معادلات و نامعادلات نمایی (۲) ..... ۴۵
- آزمون ۴۵: لگاریتم (۱) ..... ۴۶
- آزمون ۴۶: لگاریتم (۲) ..... ۴۷
- آزمون ۴۷: توابع لگاریتمی (۱) ..... ۴۸
- آزمون ۴۸: توابع لگاریتمی (۲) ..... ۴۹
- آزمون ۴۹: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۱) ..... ۵۰
- آزمون ۵۰: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۲) ..... ۵۱
- آزمون ۵۱: آزمون فصل ششم (۱) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) .. ۵۲
- آزمون ۵۲: آزمون فصل ششم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) .. ۵۳

### ● فصل هفتم: هندسهٔ تحلیلی

- آزمون ۵۳: خط راست (۱) ..... ۵۴
- آزمون ۵۴: خط راست (۲) ..... ۵۵

### ● فصل هشتم: تابع

- آزمون ۵۵: مفاهیم اولیه ..... ۵۶
- آزمون ۵۶: توابع معروف ..... ۵۷
- آزمون ۵۷: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۱) ..... ۵۸
- آزمون ۵۸: سهمی و تابع درجهٔ دوم (۲) ..... ۵۹
- آزمون ۵۹: دامنه و برد تابع و تساوی توابع ..... ۶۰
- آزمون ۶۰: مدل‌سازی با توابع ..... ۶۱
- آزمون ۶۱: جبر توابع (۱) ..... ۶۲
- آزمون ۶۲: جبر توابع (۲) ..... ۶۳
- آزمون ۶۳: ترکیب توابع (۱) ..... ۶۴
- آزمون ۶۴: ترکیب توابع (۲) ..... ۶۵
- آزمون ۶۵: ترکیب توابع (۳) ..... ۶۶
- آزمون ۶۶: تبدیل نمودار توابع (۱) ..... ۶۷
- آزمون ۶۷: تبدیل نمودار توابع (۲) ..... ۶۹
- آزمون ۶۸: توابع یک‌به‌یک ..... ۷۱

- آزمون ۹۵: آزمون فصل نهم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری) .. ۹۸
- آزمون ۹۶: آزمون فصل نهم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری) .. ۹۹
- آزمون ۹۷: آزمون فصل نهم (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) .. ۱۰۰
- آزمون ۹۸: آزمون فصل نهم (۴) (برگزیده کنکورهای سراسری) .. ۱۰۱

### ● فصل دهم: حد و پیوستگی

- آزمون ۹۹: مفهوم حد و قضایای حد (۱) ..... ۱۰۲
- آزمون ۱۰۰: مفهوم حد و قضایای حد (۲) ..... ۱۰۳
- آزمون ۱۰۱: حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  برای تابع‌های گویا و گنگ (۱) .... ۱۰۴
- آزمون ۱۰۲: حاصل مبهم  $\frac{0}{0}$  برای تابع‌های گویا و گنگ (۲) .... ۱۰۵
- آزمون ۱۰۳: حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  برای حدهای مثلثاتی (۱) ..... ۱۰۶
- آزمون ۱۰۴: حالت مبهم  $\frac{0}{0}$  برای حدهای مثلثاتی (۲) ..... ۱۰۷
- آزمون ۱۰۵: پیوستگی (۱) ..... ۱۰۸
- آزمون ۱۰۶: پیوستگی (۲) ..... ۱۰۹
- آزمون ۱۰۷: حد بی‌نهایت (۱) ..... ۱۱۰
- آزمون ۱۰۸: حد بی‌نهایت (۲) ..... ۱۱۱
- آزمون ۱۰۹: مجانب قائم ..... ۱۱۲
- آزمون ۱۱۰: حد در بی‌نهایت (۱) ..... ۱۱۳
- آزمون ۱۱۱: حد در بی‌نهایت (۲) ..... ۱۱۴
- آزمون ۱۱۲: مجانب افقی ..... ۱۱۵
- آزمون ۱۱۳: آزمون فصل دهم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۱۶
- آزمون ۱۱۴: آزمون فصل دهم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۱۷
- آزمون ۱۱۵: آزمون فصل دهم (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۱۸

### ● فصل یازدهم: مشتق

- آزمون ۱۱۶: مفهوم مشتق (۱) ..... ۱۱۹
- آزمون ۱۱۷: مفهوم مشتق (۲) ..... ۱۲۰

- آزمون ۱۱۸: قواعد مشتق‌گیری (۱) ..... ۱۲۱
- آزمون ۱۱۹: قواعد مشتق‌گیری (۲) ..... ۱۲۲
- آزمون ۱۲۰: قواعد مشتق‌گیری (۳) ..... ۱۲۳
- آزمون ۱۲۱: مشتق تابع مرکب (۱) ..... ۱۲۴
- آزمون ۱۲۲: مشتق تابع مرکب (۲) ..... ۱۲۵
- آزمون ۱۲۳: مشتق تابع مرکب (۳) ..... ۱۲۶
- آزمون ۱۲۴: مشتق‌پذیری ..... ۱۲۷
- آزمون ۱۲۵: خط مماس بر نمودار تابع ..... ۱۲۸
- آزمون ۱۲۶: آهنگ تغییر ..... ۱۲۹
- آزمون ۱۲۷: مشتق دوم (۱) ..... ۱۳۰
- آزمون ۱۲۸: مشتق دوم (۲) ..... ۱۳۱
- آزمون ۱۲۹: قاعده هوییتال (۱) ..... ۱۳۲
- آزمون ۱۳۰: قاعده هوییتال (۲) ..... ۱۳۳
- آزمون ۱۳۱: آزمون فصل یازدهم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۳۴
- آزمون ۱۳۲: آزمون فصل یازدهم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۳۵
- آزمون ۱۳۳: آزمون فصل یازدهم (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۳۶
- آزمون ۱۳۴: آزمون فصل یازدهم (۴) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۳۷
- آزمون ۱۳۵: آزمون فصل یازدهم (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۳۸

### ● فصل دوازدهم: کاربردهای مشتق

- آزمون ۱۳۶: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۱) ..... ۱۳۹
- آزمون ۱۳۷: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۲) ..... ۱۴۰
- آزمون ۱۳۸: نقاط بحرانی ..... ۱۴۱

آزمون ۱۳۹: اکستریم‌های نسبی (۱) ..... ۱۴۲

آزمون ۱۴۰: اکستریم‌های نسبی (۲) ..... ۱۴۳

آزمون ۱۴۱: اکستریم‌های مطلق (۱) ..... ۱۴۴

آزمون ۱۴۲: اکستریم‌های مطلق (۲) ..... ۱۴۵

آزمون ۱۴۳: بهینه‌سازی (۱) ..... ۱۴۶

آزمون ۱۴۴: بهینه‌سازی (۲) ..... ۱۴۷

آزمون ۱۴۵: جهت تقعر (۱) ..... ۱۴۸

آزمون ۱۴۶: جهت تقعر (۲) ..... ۱۴۹

آزمون ۱۴۷: نقطه عطف (۱) ..... ۱۵۰

آزمون ۱۴۸: نقطه عطف (۲) ..... ۱۵۱

آزمون ۱۴۹: رسم نمودار (۱) ..... ۱۵۲

آزمون ۱۵۰: رسم نمودار (۲) ..... ۱۵۳

آزمون ۱۵۱: آزمون فصل دوازدهم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۵۴

آزمون ۱۵۲: آزمون فصل دوازدهم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۵۵

آزمون ۱۵۳: آزمون فصل دوازدهم (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۵۶

آزمون ۱۵۴: آزمون فصل دوازدهم (۴) (برگزیده کنکورهای سراسری) ..... ۱۵۷

## ● فصل سیزدهم: شبیه‌ساز آزمون‌های آزمایشی

### و کنکور سراسری

آزمون ۱۵۵: متناسب با آزمون اول قلم‌چی ..... ۱۵۸

آزمون ۱۵۶: متناسب با آزمون دوم قلم‌چی ..... ۱۶۱

آزمون ۱۵۷: متناسب با آزمون سوم قلم‌چی ..... ۱۶۳

آزمون ۱۵۸: متناسب با آزمون چهارم قلم‌چی ..... ۱۶۵

آزمون ۱۵۹: متناسب با آزمون پنجم قلم‌چی ..... ۱۶۷

آزمون ۱۶۰: متناسب با آزمون ششم قلم‌چی ..... ۱۶۹

آزمون ۱۶۱: متناسب با آزمون هفتم قلم‌چی ..... ۱۷۱

آزمون ۱۶۲: متناسب با آزمون هشتم قلم‌چی ..... ۱۷۳

آزمون ۱۶۳: متناسب با آزمون نهم قلم‌چی ..... ۱۷۵

آزمون ۱۶۴: متناسب با آزمون دهم قلم‌چی ..... ۱۷۷

آزمون ۱۶۵: متناسب با آزمون یازدهم قلم‌چی ..... ۱۷۹

آزمون ۱۶۶: متناسب با آزمون دوازدهم قلم‌چی ..... ۱۸۱

آزمون ۱۶۷: متناسب با آزمون سیزدهم قلم‌چی ..... ۱۸۳

آزمون ۱۶۸: متناسب با آزمون چهاردهم قلم‌چی ..... ۱۸۵

آزمون ۱۶۹: متناسب با آزمون پانزدهم قلم‌چی ..... ۱۸۷

آزمون ۱۷۰: متناسب با آزمون شانزدهم قلم‌چی ..... ۱۸۹

آزمون ۱۷۱: آزمون جامع (۱) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۱

آزمون ۱۷۲: آزمون جامع (۲) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۳

آزمون ۱۷۳: آزمون جامع (۳) متناسب با کنکور سراسری .. ۱۹۵

آزمون ۱۷۴: آزمون جامع (۴) (کنکور رشته ریاضی سال ۹۸ - داخل کشور) ..... ۱۹۷

آزمون ۱۷۵: آزمون جامع (۵) (کنکور رشته ریاضی سال ۹۸ - خارج کشور) ..... ۱۹۹

## ● فصل چهاردهم: پاسخ‌های تشریحی ..... ۲۰۲

## ● فصل پانزدهم: پاسخنامه کلیدی ..... ۳۶۶

آزمون ۱۷۶: آزمون جامع (۶) (کنکور رشته ریاضی سال ۹۹ - داخل کشور) ..... ۳۷۲

آزمون ۱۷۷: آزمون جامع (۷) (کنکور رشته ریاضی سال ۹۹ - خارج کشور) ..... ۳۷۴

پاسخ کنکور سراسری ۹۹ ..... ۳۷۶

آزمون ۱۷۸: آزمون جامع (۸) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور) ..... ۳۸۱

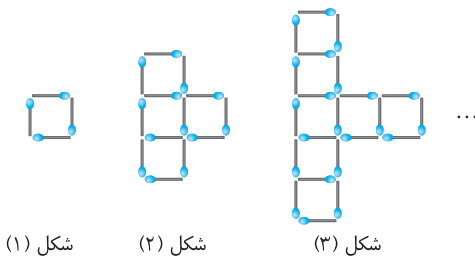
آزمون ۱۷۹: آزمون جامع (۹) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۰ - خارج کشور) ..... ۳۸۳

الگو و دنباله

آزمون ۳

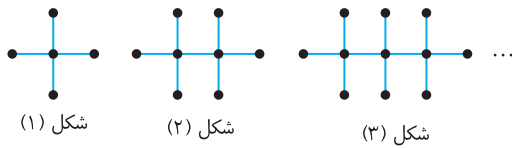
محل انجام محاسبات

۲۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی مقابل چقدر است؟



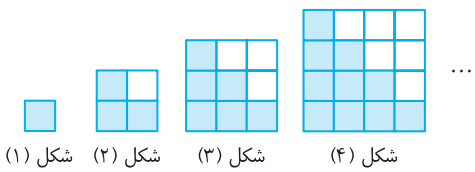
- (۱) ۱۰۳
- (۲) ۱۱۲
- (۳) ۱۲۱
- (۴) ۱۳۰

۲۲- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چقدر است؟



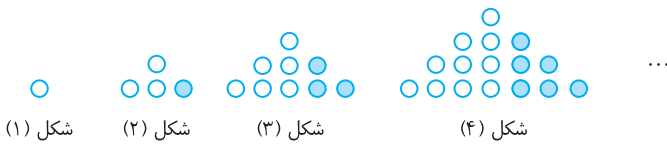
- (۱) ۶۰
- (۲) ۶۱
- (۳) ۶۲
- (۴) ۶۴

۲۳- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در شکل سی‌ام چقدر است؟



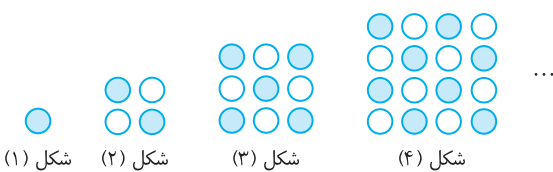
- (۱) ۱۵
- (۲) ۲۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۳۵

۲۴- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با  $\frac{1}{17}$  است؟



- (۱) ۱۸
- (۲) ۱۷
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۵

۲۵- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟



- (۱) ۱۷
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۴

۲۶- همه جمله‌های دنباله با جمله عمومی  $a_n = \frac{2n-k}{5n+3}$  با هم برابرند. مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{5}$
- (۲)  $-\frac{4}{5}$
- (۳)  $-\frac{6}{5}$
- (۴)  $-\frac{7}{5}$

۲۷- کدام یک می‌تواند جمله عمومی دنباله  $2, 3, 10, 15, \dots$  باشد؟

- (۱)  $n+1$
- (۲)  $n^2 - (-1)^n$
- (۳)  $3n^2 - 8n + 7$
- (۴)  $2n^2 - 5n + 5$

۲۸- در یک دنباله با جمله عمومی  $a_n$ ،  $a_1 = 1$  و به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  رابطه  $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$  برقرار است. مقدار  $a_{100}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{99}$
- (۲)  $\frac{1}{100}$
- (۳)  $\frac{1}{101}$
- (۴)  $\frac{1}{102}$

۲۹- اگر بزرگ‌ترین جمله دنباله با جمله عمومی  $a_n = -3n^2 + 12n + c$  برابر ۸ باشد، مقدار  $c$  کدام است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) -۸
- (۳) ۲۰
- (۴) -۴

۳۰- چند جمله از ابتدای دنباله با جمله عمومی  $a_n = \log_7 \frac{n}{n+1}$  را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) ۸



## دنباله حسابی (۱)

محل انجام محاسبات

- ۳۱- در یک دنباله،  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 1$ ،  $a_n - a_{n+1} = 2$ . در این دنباله مقدار  $\frac{a_{10}}{a_5}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{3}{2}$
- ۳۲- اگر در دنباله‌ای حسابی  $3a_4 + 4a_5 - 7a_6 = 124$ ، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟
- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۸
- ۳۳- در دنباله حسابی  $1, 2, 4, 8, \dots$  جمله چهارم کدام است؟
- (۱) -۱۹ (۲) -۲۲ (۳) -۲۳ (۴) -۲۵
- ۳۴- چندمین جمله از دنباله حسابی  $1, 2, 5, \dots$  برابر ۲۱۸ است؟
- (۱) هفتاد و یکم (۲) هفتاد و چهارم (۳) هفتاد و پنجم (۴) هفتاد و هشتم
- ۳۵- در دنباله حسابی  $1, 6, 10, \dots$  چند جمله کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟
- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۵ (۳) ۱۲۶ (۴) ۱۲۸
- ۳۶- سه زاویه مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟
- (۱)  $45^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $75^\circ$  (۴)  $90^\circ$
- ۳۷- زاویه‌های یک پنج ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازه کوچک‌ترین زاویه برابر  $86^\circ$  باشد، اندازه بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟
- (۱)  $110^\circ$  (۲)  $115^\circ$  (۳)  $120^\circ$  (۴)  $130^\circ$
- ۳۸- در جدول زیر، بین دو عدد  $\sqrt{3}-5$  و  $\sqrt{3}+5$ ، چهار واسطه حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟
- |              |  |  |  |  |              |
|--------------|--|--|--|--|--------------|
| $\sqrt{3}-5$ |  |  |  |  | $\sqrt{3}+5$ |
|--------------|--|--|--|--|--------------|
- (۱)  $\sqrt{3}-4$  (۲)  $\sqrt{3}-3$  (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{3}-1$
- ۳۹- مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟
- (۱)  $\pm \frac{1}{2}$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 3$  (۴)  $\pm 4$
- ۴۰- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل ضرب نه جمله نخست این دنباله برابر  $10! \times 10^8$  است. جمله دهم این دنباله کدام است؟
- (۱) ۹۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۹۰۰ (۴) ۱۰۰۰

## دنباله حسابی (۲)

## آزمون ۵

محل انجام محاسبات

۴۱- جمله عمومی دنباله‌ای حسابی به صورت  $a_n = \frac{5-2n}{3}$  است. قدرنسبت دنباله چقدر از جمله اول کمتر است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$       (۲)  $-\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{3}{5}$       (۴)  $\frac{5}{3}$

۴۲- در دنباله‌ای حسابی  $a_1 + a_3 = 16$  و  $a_7 + a_9 + a_{11} = 51$ . قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۴۳- جمله عمومی دنباله حسابی  $a, 2a-1, 1-3a, \dots$  کدام است؟

- (۱)  $1-\frac{n}{2}$       (۲)  $n-\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{1}{2}-n$       (۴)  $\frac{n}{2}+1$

۴۴- اگر  $a+b, a+c, b+c$  سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

- (۱)  $b, a, c$       (۲)  $b, c, a$       (۳)  $a, c, b$       (۴)  $a, b, c$

۴۵- در دنباله حسابی  $196, 192, 188, \dots$  نخستین جمله کوچک‌تر از  $10$  چندمین جمله است؟

- (۱) ۴۶      (۲) ۴۷      (۳) ۴۸      (۴) ۴۹

۴۶- در دنباله‌ای حسابی، جمله دهم  $32$  واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جمله چهارم دنباله برابر  $15$  باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

- (۱) ۸      (۲) ۷      (۳) ۶      (۴) ۵

۴۷- اگر جواب‌های معادله  $(x-a)(x^2-8x+12)=0$  جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند،  $a$  چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۶

۴۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویه قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویه قائمه این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$       (۲)  $\frac{5}{3}$       (۳)  $\frac{4}{3}$       (۴)  $\frac{3}{2}$

۴۹- مجموع چهار جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر  $80$  است. حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

- (۱)  $-18$       (۲)  $-27$       (۳)  $-36$       (۴)  $-45$

۵۰- بین دو عدد  $m^2+3m+4$  و  $m^2+4$ ، تعداد  $m-1$  عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنباله حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

## دنباله هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

- ۵۱- در دنباله‌ای با جمله عمومی  $a_n$  می‌دانیم  $a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ . اگر  $a_3 = 3$ ، مقدار  $a_{29}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{3^{27}}{2^{26}}$  (۲)  $\frac{3^{28}}{2^{27}}$  (۳)  $\frac{3^{29}}{2^{28}}$  (۴)  $\frac{3^{30}}{2^{29}}$
- ۵۲- اگر  $\sqrt{a}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{2}$  سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی باشند، جمله سیزدهم این دنباله کدام است؟
- (۱)  $\sqrt[3]{2}$  (۲)  $2\sqrt[6]{2}$  (۳)  $2\sqrt[3]{2}$  (۴)  $4\sqrt[6]{2}$
- ۵۳- واسطه حسابی جواب‌های معادله‌ای درجه دوم  $4/5$  و واسطه هندسی جواب‌های آن  $1/5$  است. این معادله کدام است؟
- (۱)  $4x^2 - 36x + 9 = 0$  (۲)  $4x^2 + 36x + 9 = 0$  (۳)  $x^2 - 18x + 9 = 0$  (۴)  $x^2 + 18x + 9 = 0$
- ۵۴- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم  $a_1 a_6 = 27$  و  $a_4 a_9 = 9$ . مقدار  $a_5$  کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۲۷ (۴) ۸۱
- ۵۵- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $-\frac{1}{2}$ ، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟
- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۲
- ۵۶- حاصل ضرب پنج جمله متوالی دنباله‌ای هندسی برابر  $1024$  است. جمله وسط کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸
- ۵۷- بین دو عدد  $\sqrt{2}$  و  $16\sqrt{2}$  هفت واسطه هندسی درج می‌کنیم (جمله اول  $\sqrt{2}$  است). جمله سوم دنباله حاصل کدام است؟
- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $8\sqrt{2}$  (۳)  $32\sqrt{2}$  (۴)  $64\sqrt{2}$
- ۵۸- جمله هشتادونهم دنباله حسابی  $\dots, -\frac{95}{8}, -12, \dots$  با جمله ششم دنباله هندسی  $\dots, 243, \dots$  برابر است. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟
- (۱) -۳ (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳) ۳ (۴)  $\frac{1}{3}$
- ۵۹- اگر  $a, 8, b$  سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۴ واحد به  $b$  اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن  $a$  کدام است؟
- (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴
- ۶۰- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) ۳ (۴) ۲

## دنباله هندسی (۲)

## آزمون ۷

محل انجام محاسبات

۶۱- در یک دنباله هندسی می‌دانیم  $\frac{a_8}{a_6} = \sqrt{2}$ . مقدار  $\frac{a_7}{a_3}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)  $\sqrt{8}$

۶۲- اگر  $\dots, 8^{2-3x}, 4^{3x}, 2^{x-4}$  دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $-\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{10}$  (۴)  $-\frac{1}{10}$

۶۳- اگر جمله هفتم دنباله هندسی  $\log_4 a, \log_{16} a, \dots$  برابر  $\frac{1}{32}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۶۴- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱،  $a_5 - a_1 = 130$  و  $a_6 - a_2 = 250$ . مقدار  $a_7$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{24}$  (۲)  $\frac{5}{24}$  (۳)  $\frac{15}{24}$  (۴)  $\frac{25}{24}$

۶۵- بین اعداد مثبت  $a$  و  $b$  پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم (جمله اول  $a$  است). اگر چهار واسطه هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۶۶- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۴ و حاصل ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۷- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (۲)  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$  (۳)  $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$  (۴)  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}}$

۶۸- اگر اعداد  $x+4$ ،  $x+y$  و  $2x+y$  سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار  $x+2y$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) ۸

۶۹- جملات سوم، پنجم و ششم دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = a - n$  سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جمله دهم دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۷۰- در یک دنباله حسابی غیرثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله هندسی‌اند. نسبت جمله چهارم دنباله هندسی به جمله دوازدهم دنباله حسابی کدام است؟

- (۱)  $\frac{23}{26}$  (۲)  $\frac{25}{26}$  (۳)  $\frac{27}{26}$  (۴)  $\frac{29}{26}$

## مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۱)

محل انجام محاسبات

۷۱- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۶- و جمله آخر آن برابر ۳۰ است. اگر مجموع جمله‌های این دنباله حسابی ۱۲۰ باشد، تعداد جمله‌های آن چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷۲- اگر  $\frac{n-2}{2n}, \frac{n-3}{2n}, \frac{n-4}{2n}$  سه جمله نخست دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع  $n$  جمله نخست این دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{n-3}{2}$  (۲)  $\frac{n-2}{4}$  (۳)  $\frac{n-3}{4}$  (۴)  $\frac{n-1}{4}$

۷۳- مجموع تعدادی از جمله‌های دنباله حسابی  $50, 46, 42, \dots$  از ابتدا حداکثر کدام است؟

- (۱) ۳۳۰ (۲) ۳۳۴ (۳) ۳۳۸ (۴) ۳۴۴

۷۴- در یک دنباله حسابی ۲ واحد از قدرنسبت کم می‌کنیم. برای اینکه مجموع ده جمله اول ثابت بماند، چقدر باید به جمله اول اضافه کنیم؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

۷۵- اگر اعداد سمت چپ معادله  $1+4+7+\dots+x=145$  جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، مقدار  $x$  کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۵ (۳) ۲۸ (۴) ۳۱

۷۶- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر ۲ است. مجموع  $n$  جمله نخست این دنباله کدام است؟

- (۱)  $2a_n - a_1$  (۲)  $3a_n - a_1$  (۳)  $2a_n + a_1$  (۴)  $3a_n + a_1$

۷۷- در دنباله‌ای هندسی  $a_7 = 96$  و  $a_7 = 3$ . مقدار  $S_{10}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3049}{2}$  (۲)  $\frac{3057}{2}$  (۳)  $\frac{3069}{2}$  (۴)  $\frac{3071}{2}$

۷۸- مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی  $a, aq, aq^2, \dots$  چند برابر مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی  $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^2}, \dots$  است؟

- (۱)  $q^n$  (۲)  $q^{n-1}$  (۳)  $q^{n+1}$  (۴)  $q^{n+2}$

۷۹- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت  $S_6 = 21S_3$ . قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۰- در دنباله‌ای هندسی، مجموع ده جمله اول ۳۳ برابر مجموع پنج جمله اول است. جمله پنجم چند برابر جمله اول است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۲۴۳ (۳) ۱۶ (۴) ۷۲۹

## آزمون ۹

## مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۲)

محل انجام محاسبات

- ۸۱- در یک دنباله حسابی مجموع جمله‌های هفتم و چهاردهم برابر ۶۰ است. مجموع بیست جمله اول دنباله کدام است؟  
 (۱) ۶۰۰ (۲) ۶۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴) ۶۵۰
- ۸۲- در دنباله حسابی  $3, 7, 11, \dots$  حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۳۰۰ شود؟  
 (۱) یازده جمله (۲) دوازده جمله (۳) سیزده جمله (۴) چهارده جمله
- ۸۳- در دنباله‌ای حسابی و  $n$  جمله‌ای،  $a_1 = -7$ ،  $a_4 = -3$  و  $S_n - a_n = 56$ . مقدار  $n$  کدام است؟  
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹
- ۸۴- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۱۰ و مجموع سه جمله آخر برابر ۸۰ است. اگر مجموع تمام جمله‌ها برابر ۳۰۰ باشد، تعداد جمله‌های دنباله کدام است؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶
- ۸۵- در یک دنباله حسابی  $2k+1$  جمله‌ای، نسبت مجموع  $k+1$  جمله با ردیف فرد به مجموع  $k$  جمله با ردیف زوج کدام است؟  
 (۱)  $\frac{2k}{2k+1}$  (۲)  $\frac{4k+3}{2k+1}$  (۳)  $\frac{4k+3}{4k+2}$  (۴)  $\frac{k+1}{k}$
- ۸۶- مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه  $S_n = \frac{4}{3}(3^n - 1)$  به دست می‌آید. جمله پنجم دنباله کدام است؟  
 (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۱۶ (۳) ۲۲۴ (۴) ۲۷۰
- ۸۷- در دنباله هندسی  $1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \dots$  مجموع شش جمله دوم چند برابر مجموع شش جمله اول است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲
- ۸۸- درباره دنباله  $a_1, a_2, \dots$  می‌دانیم  $S_n = 2^n - 1$ . حاصل  $a_1^2 + \dots + a_n^2$  کدام است؟  
 (۱)  $(2^n - 1)^2$  (۲)  $\frac{1}{3}(2^n - 1)$  (۳)  $4^n - 1$  (۴)  $\frac{1}{3}(4^n - 1)$
- ۸۹- تعداد جمله‌های یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) ۳
- ۹۰- حاصل  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟  
 (۱)  $3 + \sqrt{5}$  (۲)  $3 - \sqrt{5}$  (۳)  $2 + \sqrt{5}$  (۴)  $4 - \sqrt{5}$

## آزمون فصل دوم (۱) (برگزیده کنکورهای سراسری)

## آزمون ۱۰

محل انجام محاسبات

 ۹۱- در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 1$  و برای هر  $n \geq 2$ ،  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ . جمله هشتم این دنباله کدام است؟ تجربی - ۹۵

(۱) ۱۲۷      (۲) ۱۵۹      (۳) ۲۴۷      (۴) ۲۵۵

 ۹۲- اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$ ،  $2^b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی اند. واسطه حسابی  $a$  و  $b$  کدام است؟ ریاضی - ۸۷

 (۱)  $\frac{2}{5}$       (۲) ۲      (۳)  $\frac{1}{5}$       (۴)  $\sqrt{2}$ 

 ۹۳- تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی برابر ۵ و مجموع جمله دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۴

 (۱) ۳۵      (۲) ۳۶      (۳)  $\frac{37}{5}$       (۴)  $\frac{38}{5}$ 

 ۹۴- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ تجربی - ۹۲

 (۱)  $\frac{5}{3}$       (۲)  $\frac{7}{4}$       (۳)  $\frac{9}{4}$       (۴)  $\frac{7}{3}$ 

 ۹۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ ریاضی - ۸۱

 (۱) ۳      (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳) ۲      (۴)  $\frac{4}{3}$ 

 ۹۶- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول کدام است؟ ریاضی - ۸۸

 (۱)  $\frac{10}{8}$       (۲)  $\frac{11}{2}$       (۳)  $\frac{12}{6}$       (۴)  $\frac{13}{4}$ 

 ۹۷- در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟ ریاضی - ۹۰

(۱) ۳۲      (۲) ۳۴      (۳) ۳۶      (۴) ۳۸

 ۹۸- در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول آن،  $\frac{1}{3}$  مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۱

 (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $\frac{5}{2}$       (۳) ۳      (۴) ۴

۹۹- عددهای طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد:

 $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$ 

 مجموع جمله‌ها در دسته بیستم کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۴

(۱) ۴۰۱۰      (۲) ۴۰۲۰      (۳) ۴۰۳۰      (۴) ۴۰۴۰

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

 ۱۰۰- حاصل  $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$  به‌ازای  $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  کدام است؟

(۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

## آزمون فصل دوم (۲) (برگزیده کنکورهای سراسری)

## آزمون ۱۱

محل انجام محاسبات

۱۰۱- در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$ ،  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ . مقدار  $a_8 - a_7$  کدام است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۲ (۱)      ۴۸ (۲)      ۵۶ (۳)      ۶۴ (۴)

۱۰۲- اعداد  $1-5p$ ،  $3p+4$ ،  $2p+3$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی - ۸۴

۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

۱۰۳- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۹ و حاصل ضرب آنها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟ تجربی - ۹۰

۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

۱۰۴- در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از دنباله ای هندسی با قدرنسبت بزرگتر از ۱ هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۶ (۱)      ۵ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)

۱۰۵- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله، صفر است؟ تجربی - ۸۸

۱۲ (۱)      ۱۱ (۲)      ۱۰ (۳)      ۹ (۴)

۱۰۶- در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ ریاضی - ۸۹

۸۱ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۶ (۴)

۱۰۷- در بیست جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جمله اول کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۸۵

صفر (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

۱۰۸- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جمله های هر دسته برابر شماره آن دسته باشد:

$(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$

تجربی - ۹۴

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی ام کدام است؟

۱۷۰۰ (۱)      ۱۷۵۰ (۲)      ۱۸۰۰ (۳)      ۱۸۵۰ (۴)

۱۰۹- تعداد جمله های یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله های دنباله ۳ برابر مجموع جمله های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی - ۹۴

۱ (۱)      ۱/۲ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

ریاضی - ۹۳

۱۱۰- حاصل  $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$  به ازای  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  کدام است؟

۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)



**۲۳ ۳** تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل  $n$ م برابر است با  $1+2+3+\dots+n$ .  
تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل  $n$ م برابر است با  $(n-1)+2+3+\dots+n$ . بنابراین  
تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل  $n$ م،  $n$  تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ‌نشده آن  
است. پس در شکل سی‌ام، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر  $30$  تا است.

**۲۴ ۲** تعداد کل گوی‌ها در شکل  $n$ م برابر است با  
 $1+2+3+\dots+(2n-1)=n^2$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل  $n$ م برابر است با  $\frac{n(n-1)}{2}$   
 $1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل  $n$ م برابر است با  
 $\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$ . به این ترتیب  $\frac{2}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$  پس  $n=17$ .

**۲۵ ۲** با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آن‌ها زوج است، نصف تعداد

گوی‌ها یعنی  $\frac{n^2}{2}$  رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شماره آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها

نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها  $n^2-1$  خواهد بود که  
نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس  $1+\frac{n^2-1}{2}$

گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر  $n$  عددی زوج باشد،  $\frac{n^2}{2}$  نیز عددی زوج است.

پس در شکل‌های با شماره زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با  
شماره فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون  $113$  گوی رنگی در شکل  $n$ م  
وجود دارد، پس  $n$  باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2-1}{2}+1=113 \Rightarrow n^2-1=224 \Rightarrow n^2=225 \Rightarrow n=15$$

**۲۶ ۳** چون همه جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن  
نیز با هم برابرند:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{2-k}{8} = \frac{4-k}{13} \Rightarrow 26-13k = 32-8k \Rightarrow 5k = -6 \Rightarrow k = -\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر  $k = -\frac{6}{5}$ ، آن‌گاه  $a_n = \frac{2}{5}$ .

**۲۷ ۲** چند جمله‌اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینه (۱)  $2, 3, 4, 5, \dots$       گزینه (۲)  $2, 3, 10, 15, \dots$

گزینه (۳)  $2, 3, 10, 23, \dots$       گزینه (۴)  $2, 3, 8, 17, \dots$

بنابراین فقط  $(-1)^n - n^2$  می‌تواند جمله عمومی دنباله باشد.

**۲۸ ۲** به چند جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{2}{3} \times a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{3}{4} \times a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{12}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت  $a_n = \frac{1}{n}$  پس  $a_{100} = \frac{1}{100}$ .

**۲۹ ۴** بیشترین مقدار تابع درجه دوم  $y = -3x^2 + 12x + c$  به‌ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-6} = 2$$

برابر  $a_p$  است. در نتیجه  $a_p = 8 \Rightarrow -3 \times 4 + 12 \times 2 + c = 8 \Rightarrow c = -4$

**۳۰ ۳** توجه کنید که

$$a_1 = \log_2 \frac{1}{2}, a_2 = \log_2 \frac{2}{3}, a_3 = \log_2 \frac{3}{4}, \dots$$

بنابراین مجموع  $n$  جمله اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{n-1}{n} + \log_2 \frac{n}{n+1}$$

$$= \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right) = \log_2 \frac{1}{n+1} = -\log_2(n+1)$$

بنابراین  $-\log_2(n+1) = -3 \Rightarrow n+1 = 2^3 = 8 \Rightarrow n = 7$

**۱۶ ۱** توجه کنید که  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 24$$

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 24 \\ n(A) - n(B) = 4 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 10$$

**۱۷ ۱** توجه کنید که  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow n(A \cup B) = n(B)$

طبق فرض  $n(A \cup B) = 9$ ، پس  $n(B) = 9$ . از طرف دیگر،

$$n(A) + n(A') = n(B) + n(B') \Rightarrow n(A) + 14 = 9 + 10 \Rightarrow n(A) = 5$$

**۱۸ ۲** فرض کنید  $A$  مجموعه علاقه‌مندان به ریاضی و  $B$  مجموعه

علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس  
علاقه‌مند نیستند  $x$  باشد، آن‌گاه  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$100 - x = 85 + 70 - n(A \cap B)$$

پس  $n(A \cap B) = 55 + x$ . برای اینکه  $n(A \cap B)$  حداقل باشد، باید  $x = 0$ . بنابراین  
حداقل مقدار ممکن  $n(A \cap B)$  برابر با  $55$  است.

**۱۹ ۲** راه‌حل اول فرض کنید  $x$  نفر نه

چای دوست دارند، نه قهوه. بنابراین  $30 - x$  نفر یا

چای دوست دارند یا قهوه و  $y$  نفر هم چای و هم قهوه

دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو

را دوست دارند در نمودارون مقابل مشخص کرده‌ایم.

$$x + 18 - y + y + 15 - y = 30 \Rightarrow x = y - 3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x \geq 0, y \geq 0, 15 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 15 \Rightarrow 0 \leq y \leq 15$$

$$0 \leq y - 3 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq x \leq 12$$

پس

پس حداکثر  $12$  نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

**راه‌حل دوم** فرض کنید  $A$  مجموعه دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و  $B$   
مجموعه دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 12 + 15 - n(A \cup B) = 27 - n(A \cup B)$$

از طرف دیگر،  $n(A \cup B) \geq n(B) = 15$ . بنابراین

$$n(A \cap B) = 27 - n(A \cup B) \leq 27 - 15 = 12$$

بنابراین حداکثر  $12$  دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه  
(توجه کنید که اگر  $A \subseteq B$ ، این وضعیت پیش می‌آید).

**۲۰ ۳** چون  $A \subseteq B$ ، پس  $A \cup B = B$ . از طرف دیگر،

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

اکنون توجه کنید که  $14 = n(A) + 2n(B) \leq n(B) + 2n(B) = 3n(B)$  و چون

$$n(B) \text{ عددی طبیعی است، پس } n(B) \geq 5. \text{ بنابراین } n(A \cup B) = n(B) \geq 5.$$

**۲۱ ۳** شکل اول  $4$  چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل،  $9$  چوب کبریت

به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل  $n$ م،  $4 + 9(n-1)$  یعنی  $9n - 5$  چوب

کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم  $121$  چوب کبریت وجود دارد.

**۲۲ ۳** راه‌حل اول تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	$n$
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

بنابراین در شکل  $n$ م،  $3n+2$  نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم  $62$  نقطه داریم.

**راه‌حل دوم** اگر  $4$  نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل  $n$ م برابر

$3(n+2)$  خواهد بود. پس در شکل  $n$ م،  $4 - 3(n+2)$  نقطه داریم. یعنی در شکل

بیستم  $62$  نقطه داریم.

به این ترتیب  $a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 10^9 \times 10^8 \times \dots \times 10^1 \Rightarrow d(2d)(3d) \dots (9d) = 10^9 \times 10^8 \dots$   
 $d^9 \times 9! = 10^9 \times 9! \Rightarrow d = 10$   
 بنابراین  $a_{10} = 10^9 d = 10^{10}$

**۴۱ ۴** راه‌حل اول با قرار دادن  $n=1$  در جمله عمومی به دست می‌آید  
 $a_1 = 1$ . با قرار دادن  $n=2$  در جمله عمومی به دست می‌آید  $a_2 = \frac{1}{3}$ . بنابراین

$$a_1 - d = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -\frac{2}{3}$$

راه‌حل دوم جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  و جمله اول  $a_1$  به صورت

$$a_n = dn + (a_1 - d) = -\frac{2}{3}n + \frac{5}{3}$$

$$a_1 - d = \frac{5}{3}$$

**۴۲ ۲** از  $a_1 + a_2 = 16 \Rightarrow a_1 + d = 8$

چون  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 51$  پس  $3a_1 + 12d = 51$

$$\begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 3a_1 + 12d = 51 \end{cases}$$

از حل دستگاه به دست می‌آید  $d = 3$

**۴۳ ۱** چون دنباله حسابی است، پس  $2a - 1 = \frac{a+1-3a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

بنابراین  $d = (2a - 1) - a = a - 1 = -\frac{1}{2}$  پس جمله عمومی دنباله به شکل

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1) = 1 - \frac{n}{2}$$

مقابل است:

**۴۴ ۴** راه‌حل اول چون  $a+b, a+c, b+c$  دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c - (a+b) = (b+c) - (a+c) \Rightarrow c - b = b - a$$

در نتیجه  $a, b, c$  دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون  $a+b, a+c, b+c$  دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c = \frac{a+b+b+c}{2} \Rightarrow 2(a+c) = a+2b+c \Rightarrow a+c = 2b$$

در نتیجه  $a, b, c$  دنباله‌ای حسابی است.

**۴۵ ۳** جمله عمومی دنباله به صورت  $a_n = 196 - 4(n-1) = 200 - 4n$

است. بنابراین  $a_{50} = 0$ . در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر  $-4$  است، پس

$$a_{47} = 12, \quad a_{48} = 8, \quad a_{49} = 4, \quad a_{50} = 0$$

**۴۶ ۲** ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:  $d = \frac{a_{10} - a_2}{10 - 2} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$

بنابراین  $a_4 = a_1 + 3d = a_1 - 12 = 15 \Rightarrow a_1 = 27$  و در نتیجه  $a_1 = 27$ . بنابراین جمله عمومی

$$dنباله می‌شود  $a_n = 27 - 4(n-1) = 31 - 4n$  اکنون توجه کنید که$$

$$a_n > 0 \Rightarrow 31 - 4n > 0 \Rightarrow n \leq 7$$

بنابراین هفت جمله نخست دنباله مثبت هستند.

**۴۷ ۲** چون  $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$  پس جواب‌های معادله مورد

نظر  $a, 2$  و  $6$  هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$6, 2, a \Rightarrow \frac{6+a}{2} = 2 \Rightarrow a = -2, \quad 2, 6, a \Rightarrow \frac{2+a}{2} = 6 \Rightarrow a = 10$$

$$6, a, 2 \Rightarrow \frac{6+2}{2} = a \Rightarrow a = 4, \quad 2, a, 6 \Rightarrow \frac{2+6}{2} = a \Rightarrow a = 4$$

$$a, 6, 2 \Rightarrow \frac{a+2}{2} = 6 \Rightarrow a = 10, \quad a, 2, 6 \Rightarrow \frac{a+6}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین  $a$  ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

**۳۱ ۳** چون  $a_{n+1} - a_n = -2$  پس دنباله مورد نظر دنباله‌ای حسابی است

که قدرنسبت آن  $-2$  است. چون جمله اول برابر  $3$  است، پس

$$a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(-2) = -15, \quad a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4(-2) = -5$$

$$\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{-15}{-5} = 3$$

**۳۲ ۲** از رابطه داده شده به دست می‌آید

$$3(a_1 + 3d) + 4(a_1 + 4d) - 7(a_1 + 8d) = 124 \Rightarrow -31d = 124 \Rightarrow d = -4$$

**۳۳ ۴** قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x - 4 - (3x - 1) = -3$$

$$4x - 2 = (3x - 4) - 3 \Rightarrow x = -5$$

بنابراین جمله سوم دنباله برابر است با  $4(-5) - 2 = -22$  و جمله چهارم برابر است با

$$-22 - 3 = -25$$

**۳۴ ۲** چون  $a_1 = -1$  و  $d = 2 - (-1) = 3$  پس  $a_n = -1 + 3(n-1)$  یعنی

$$a_n = 3n - 4$$

بنابراین  $a_k = 3k - 4 = 218$  پس  $k = 74$ .

**۳۵ ۲** چون  $a_1 = 2$  و  $d = 4$  پس جمله عمومی دنباله به صورت

$$a_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$$

باید  $4n - 2 < 500 \Rightarrow n < \frac{502}{4} \Rightarrow n \leq 125$  یعنی  $a_n < 500$

پس  $125$  جمله اول دنباله کمتر از  $500$  هستند.

**۳۶ ۲** اندازه زاویه‌های مثلث را به صورت  $a, a+d, a-d$  در نظر می‌گیریم.

مجموع اندازه زاویه‌های مثلث برابر  $180^\circ$  است، پس

$$a - d + a + a + d = 180^\circ \Rightarrow a = 60^\circ$$

میانگین اندازه بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه مثلث همان  $a$  است که برابر  $60^\circ$  است.

**۳۷ ۴** زاویه‌های پنج‌ضلعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازه زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر  $540^\circ$  است، پس

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 540^\circ$$

بنابراین  $5a = 540^\circ \Rightarrow a = 108^\circ$ . اندازه کوچک‌ترین زاویه  $86^\circ$  است، پس

$a - 2d = 86^\circ$  و در نتیجه  $d = 11^\circ$ . پس اندازه بزرگ‌ترین زاویه یعنی  $a + 2d$  برابر

$$است با  $108^\circ + 2 \times 11^\circ = 130^\circ$ .$$

**۳۸ ۲** راه‌حل اول چون  $a_1 = \sqrt{3} - 5$  و  $a_2 = \sqrt{3} + 5$  پس

$$a_2 = a_1 + 5d \Rightarrow \sqrt{3} + 5 = \sqrt{3} - 5 + 5d \Rightarrow d = 2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد  $\sqrt{3} - 5 + 2$  یا همان  $\sqrt{3} - 3$  است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر است با

$$d = \frac{(\sqrt{3} + 5) - (\sqrt{3} - 5)}{4 - 1} = \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با  $(\sqrt{3} - 5) + 2 = \sqrt{3} - 3$

**۳۹ ۴** سه جمله متوالی دنباله را به صورت  $a, a+d, a-d$  در نظر می‌گیریم.

$$a - d + a + a + d = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 45 \Rightarrow a(a^2 - d^2) = 45$$

از طرف دیگر،

$$5(25 - d^2) = 45 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$$

چون  $a = 5$  پس

**۴۰ ۲** فرض کنید قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر  $d$  باشد. در این صورت

$$a_1 = d, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = d + (n-1)d = nd$$

**۵۶ ۳** این جملات را به صورت  $a, ar, ar^2, \dots, \frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \dots$  در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 1024 \Rightarrow a^5 = 2^{10} = 4^5$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

**۵۷ ۱** راه‌حل اول این اعداد به شکل زیر هستند:  
 $\sqrt{2}, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, \circ, 16\sqrt{2}$

پس  $a_1 = \sqrt{2}$  و  $a_9 = 16\sqrt{2}$ . بنابراین

$$a_1 r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} r^8 = 16\sqrt{2} \Rightarrow r^8 = 16 \Rightarrow (r^2)^4 = 2^4 \Rightarrow r^2 = 2$$

در نتیجه  $a_p = a_1 r^2 = 2\sqrt{2}$ .

**راه‌حل دوم** ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{2+1} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow r^3 = 16 = 2^4 \Rightarrow r = \pm \sqrt[3]{2}$$

$$a_p = a_1 r^2 = \sqrt{2} \times (\pm \sqrt[3]{2})^2 = 2\sqrt[3]{2}$$

**۵۸ ۲** قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با  $\frac{1}{8} = (-12) - (-12) = \frac{1}{8}$ . بنابراین

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت  $a_n = -12 + \frac{1}{8}(n-1)$  است.

در نتیجه جملهٔ هشتمادونهم این دنباله برابر است با  $a_{89} = -12 + \frac{1}{8} \times (89-1) = -1$ .

اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با  $r$  نشان دهیم، آن‌گاه

$$11 = (3r)^5 = 3^5 r^5 = 243 r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{1}{21.6} = \frac{1}{216}$$

بنابراین  $(3r)^5 = -1 \Rightarrow 3r = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$

**۵۹ ۱** چون  $a$  و  $b$  اعدادی حسابی هستند، پس

$$a + b = 16 \Rightarrow b = 16 - a$$

اگر  $4$  واحد به  $b$  اضافه کنیم،  $8$  واسطهٔ هندسی اعداد  $a$  و  $b+4$  می‌شود. بنابراین

$$64 = a(b+4) = a(16-a+4) = 20a - a^2$$

پس  $a^2 - 20a + 64 = 0$  و مجموع مقادیر ممکن  $a$  برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر  $20$  است (توجه کنید در این معادله  $\Delta > 0$ ).

**۶۰ ۴** جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب به صورت

$a+d, a+3d, a+5d$  و  $a+13d$  در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس  $(a+5d)^2 = (a+d)(a+13d) \Rightarrow 12d^2 = 4ad \Rightarrow a = 3d$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با  $r = \frac{a+5d}{a+d} = \frac{3d+5d}{3d+d} = \frac{8d}{4d} = 2$

**۶۱ ۲** چون  $\frac{a_1}{a_6} = \sqrt{2}$ ، پس  $\frac{a_1 r^5}{a_1} = \sqrt{2}$ . در نتیجه  $r^5 = \sqrt{2}$ . بنابراین

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = r^2 = (r^5)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$$

**۶۲ ۳** چون  $4^{2x}$  واسطهٔ هندسی  $2^{x-4}$  و  $8^{2-3x}$  است، پس

$$(4^{2x})^2 = 2^{x-4} \times 8^{2-3x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{x-4} \times 2^{6-9x} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{2-8x}$$

بنابراین  $12x = 2 - 8x$ ، یعنی  $x = \frac{1}{10}$ .

**۶۳ ۲** قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r = \frac{\log a}{\log_{16} a} = \frac{\log 16}{\log 16} = \frac{\log 4}{\log 16} = \frac{\log 4}{2 \log 4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین  $a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow \frac{1}{32} = \log_4 a \times \frac{1}{64} \Rightarrow \log_4 a = 2 \Rightarrow a = 4^2 = 16$

**۴۸ ۳** اضلاع مثلث را  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad$$

$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه  $a$  و

$a-d$  است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با  $\frac{a}{a-d} = \frac{4d}{4d-d} = \frac{4d}{3d} = \frac{4}{3}$

**۴۹ ۳** چهار جملهٔ متوالی دنباله را به صورت  $a-3d, a-d, a+d, a+3d$

در نظر می‌گیریم. بنابراین  $a-3d+a-d+a+d+a+3d=0 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow a=0$  پس دنباله به صورت  $-3d, -d, d, 3d$  است و

$$9d^2 + d^2 + d^2 + 9d^2 = 80 \Rightarrow d^2 = 4$$

بنابراین، حاصل ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(3d)(-3d) = -9d^2 = -36$$

**۵۰ ۳** ابتدا توجه کنید که  $m$  باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از  $1$  باشد. پس

$$m^2 + 4 < m^2 + 3m + 4$$

اگر  $m-1$  عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر

$$d = \frac{m^2 + 3m + 4 - m^2 - 4}{(m-1) + 1} = \frac{3m}{m}$$

است با

**۵۱ ۱** دنبالهٔ  $a_n$  دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $\frac{3}{2}$  است. در نتیجه

$$a_p = a_1 r^2 \Rightarrow a_p = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3}$$

بنابراین  $a_{26} = a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^{25} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{25} = \frac{3^{24}}{2^{26}}$

**۵۲ ۲** ابتدا توجه کنید که  $\sqrt[3]{2}$  واسطهٔ هندسی  $\sqrt{a}$  و  $\sqrt[3]{2}$  است، پس

$$(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{a} \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با  $r = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$ ، در نتیجه

$$a_{13} = a_1 r^{12} = \sqrt{a} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)^{12} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2^4}{2^6}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{2^4}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} \times 2 = \frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^5}$$

**۵۳ ۱** فرض می‌کنیم جواب‌های معادله  $x_1$  و  $x_2$  باشند. در این صورت

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4/5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8, \quad \sqrt{x_1 x_2} = 1/5 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{1}{25}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل  $x^2 - 8x + \frac{1}{25} = 0$  است که اگر طرفین آن را در  $4$

ضرب کنیم، می‌شود  $4x^2 - 32x + 1 = 0$ .

**۵۴ ۳** از تساوی  $a_4 a_6 = 27$  نتیجه می‌شود  $a_1 r^3 a_1 r^5 = 27 \Rightarrow a_1^2 r^8 = 27$

از تساوی  $a_1 r^2 a_1 r^4 = 9 \Rightarrow a_1^2 r^6 = 9$  به دست می‌آید

از تقسیم طرفین دو تساوی به دست آمده نتیجه می‌شود  $\frac{a_1^2 r^8}{a_1^2 r^6} = \frac{27}{9} \Rightarrow r^2 = 3$

با جای گذاری  $r = 3$  در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود  $a_1 = \pm \frac{1}{3}$ . چون جملات دنباله

مثبت هستند، پس  $a_1 = \frac{1}{3}$  و در نتیجه  $a_5 = a_1 r^4 = \frac{1}{3} \times 3^4 = 27$ .

**۵۵ ۲** مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_5 + a_8 = a_1 r^4 + a_1 r^7 = a_1 r^4 (1 + r^3)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با  $a_7 + a_8 = a_1 r^6 + a_1 r^7 = a_1 r^6 (1 + r)$

$$\frac{a_5 + a_8}{a_7 + a_8} = \frac{a_1 r^4 (1 + r^3)}{a_1 r^6 (1 + r)} = \frac{1 + r^3}{r^2 (1 + r)} = \frac{1 - 1}{\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{4})} = 7$$

۴۴ توجه کنید که ۴

$$a_5 - a_1 = 13^0 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 = 13^0 \Rightarrow a_1 (r^4 - 1) = 13^0$$

$$a_4 - a_1 = 25 \Rightarrow a_1 r^3 - a_1 r = 25 \Rightarrow a_1 r (r^2 - 1) = 25$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{r^4 - 1}{r(r^2 - 1)} = \frac{13^0}{25} \Rightarrow \frac{(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{r(r^2 - 1)} = \frac{26}{5} \Rightarrow \frac{r^2 + 1}{r} = \frac{26}{5}$$

$$5(r^2 + 1) = 26r \Rightarrow 5r^2 - 26r + 5 = 0 \Rightarrow r = 5, r = \frac{1}{5} \text{ (غ.ق.)}$$

$$a_1 r (r^2 - 1) = 25 \Rightarrow a_1 \times 5 \times 24 = 25 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{24}$$

به این ترتیب،

$$\text{در نتیجه } a_1 r = \frac{25}{24} \Rightarrow a_1 = \frac{25}{24}$$

۴۵ در حالتی که پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم،  $r^6 = \frac{b}{a}$  در حالتی که

$$\text{چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم، } r^5 = (2r)^5 = \frac{b}{a} \text{ بنابراین}$$

$$r^6 = (2r)^5 \Rightarrow r^6 = 32r^5 \Rightarrow r = 32$$

۴۶ این سه عدد را به صورت  $\frac{a}{r}, a, ar$  در نظر می‌گیریم. پس

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \Rightarrow a \left( \frac{1}{r} + 1 + r \right) = 14$$

$$4 \left( \frac{1}{r} + 1 + r \right) = 14 \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, r = 2$$

بنابراین سه جمله مورد نظر به ازای  $r = \frac{1}{2}$ ، به صورت  $8, 4, 2$  و به ازای  $r = 2$ ، به صورت  $2, 4, 8$  هستند.

در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۴۷ طول اضلاع مثلث را  $a, ar, ar^2$  در نظر می‌گیریم. طبق قضیه فیثاغورس،  $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$  بنابراین

$$a^2(1+r^2) = a^2 r^4 \Rightarrow r^4 - r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۴۸ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنباله ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases} 2y + x = 2x + y \Rightarrow y = x \\ 2y + x = x + 4 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2 \Rightarrow x + 2y = 6$$

۴۹ توجه کنید که  $a_3 = a - 3, a_5 = a - 5, a_6 = a - 6$

$$\text{بنابر فرض، } (a-5)^2 = (a-3)(a-6)$$

$$a^2 - 10a + 25 = a^2 - 9a + 18 \Rightarrow a = 7$$

در نتیجه  $a_1 = 7 - 1 = 6$

۵۰ جملات سوم، پنجم و هشتم دنباله حسابی را به ترتیب  $a, a+2d$

و  $a+4d$  در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2 = (a+2d)(a+7d) \Rightarrow 2d^2 = ad \Rightarrow a = 2d$$

بنابراین دنباله هندسی به صورت  $2d, 4d, 6d, \dots$  است که جمله چهارم آن  $\frac{2Y}{3}d$

است زیرا  $r = \frac{3}{2}$  و  $9d \times \frac{3}{2} = \frac{2Y}{2}d$ . همچنین جمله عمومی دنباله حسابی به صورت

$$a_n = a + (n-1)d = 2d + (n-1)d = (n+1)d$$

مقابل است:

$$\frac{2Y}{3}d = \frac{2Y}{13d} \Rightarrow \frac{2Y}{13d} = \frac{2Y}{26}$$

به این ترتیب  $a_{13} = 13d$  و نسبت مورد نظر برابر است با  $\frac{2Y}{13d} = \frac{2Y}{26}$

$$S_n = \frac{n}{p}(a_1 + a_n) \Rightarrow 120 = \frac{n}{p}(-6 + 30) \Rightarrow n = 10 \text{ توجه کنید که } ۳$$

۷۲ راه حل اول قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-3}{2n} = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2n}$$

بنابراین مجموع  $n$  جمله نخست دنباله مورد نظر برابر است با

$$S_n = \frac{n}{2} \left( \frac{n-2}{n} - \frac{1}{2n} (n-1) \right) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n-3}{4}$$

۷۳ راه حل دوم به ازای  $n=1$ ، سه جمله اول دنباله  $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$  هستند. مجموع  $n$

جمله نخست دنباله همان جمله اول، یعنی  $-\frac{1}{2}$  است. فقط مقدار گزینه (۳) به ازای

$$n=1 \text{ برابر } -\frac{1}{2} \text{ است.}$$

۷۳ مجموع  $n$  جمله نخست دنباله برابر است با  $S_n = \frac{n}{p}(2a_1 + (n-1)d)$

چون  $a_1 = 50$  و  $d = -4$ ، پس  $S_n = \frac{n}{p}(100 - 4(n-1)) = 52n - 2n^2$  حداکثر

مقدار عبارت درجه دوم  $-2n^2 + 52n$  به ازای  $n = \frac{52}{4} = 13$  به دست می‌آید، پس

$$S_{13} = 338 \text{ بیشترین مقدار بین } S_n \text{ ها برابر است با}$$

۷۴ اگر جمله اول دنباله  $a_1$  و قدرنسبت آن  $d$  باشد، آن‌گاه

$$S_{10} = \frac{10}{p}(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

اگر  $2$  واحد از قدرنسبت کم کنیم و  $k$  واحد به جمله اول اضافه کنیم، مجموع ده جمله

اول می‌شود  $S_{10} = \frac{10}{p}(2(a_1+k) + 9(d-2)) = 10a_1 + 10k + 45d - 90$

چون قرار است مجموع ده جمله اول ثابت بماند، پس باید  $10k - 90 = 0 \Rightarrow k = 9$

۷۵ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله‌ای حسابی با جمله اول  $1$

و قدرنسبت  $3$  است. فرض کنید تعداد عددهای سمت چپ معادله  $n$  باشد. در این صورت

$$\frac{n}{2}(2+3(n-1)) = 145 \Rightarrow 3n^2 - n - 290 = 0$$

$$(n-10)(3n+29) = 0 \Rightarrow n = 10, n = -\frac{29}{3} \text{ (غ.ق.)}$$

بنابراین جمله دهم دنباله برابر  $x$  است و  $x = a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 27 = 28$

۷۶ مجموع  $n$  جمله نخست برابر است با

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = a_1(r^n - 1) = a_1 r^n - a_1 = 2(a_1 r^{n-1}) - a_1 = 2a_n - a_1$$

۷۷ توجه کنید که  $a_7 = 3 \Rightarrow a_1 q^6 = 3, a_9 = 96 \Rightarrow a_1 q^8 = 96$

$$\frac{a_1 q}{a_1 q^6} = \frac{3}{96} \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2 \text{ در نتیجه}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3 \times 2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{3 \times 1024 - 1}{2} = \frac{3072 - 1}{2} = \frac{3071}{2}$$

۷۸ راه حل اول مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی  $a, aq, aq^2, \dots$  برابر

است با  $S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ . مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی  $\frac{a}{q}, \frac{a}{q^2}, \dots$  برابر

$$S'_n = \frac{a \left( \frac{1}{q} \right)^n - a}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{aq(1 - q^n)}{(1 - q)q^n} = \frac{a(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)} \text{ است با}$$

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{a(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}} = q^{n-1} \text{ بنابراین}$$

**۸۵ راه حل اول** توجه کنید که مجموع  $k+1$  جمله با ردیف فرد برابر است

با  $\frac{(k+1)(a_1+a_{2k+1})}{2}$ . همچنین مجموع  $k$  جمله با ردیف زوج برابر است با

$\frac{k(a_2+a_{2k})}{2}$ . (توجه کنید  $\frac{a_2+a_{2k}}{2} = \frac{a_1+a_{2k+1}}{2}$ ). بنابراین نسبت مورد نظر برابر با  $\frac{k+1}{k}$  است.

**راه حل دوم** فرض می‌کنیم دنباله سه‌جمله‌ای باشد ( $k=1$ ) و جملات آن به صورت

$a_1, a_2, a_3$  باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با  $\frac{a_1+a_3}{a_2} = \frac{2a_2}{a_2} = 2$ .

فقط گزینه (۴) به ازای  $k=1$  برابر می‌شود.

**۸۶ راه حل دوم** اگر از مجموع پنج جمله اول دنباله، مجموع چهار جمله اول را کم کنیم، جمله پنجم به دست می‌آید:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{5}{3}(3^5 - 1) - \frac{4}{3}(3^4 - 1) = \frac{4}{3}(3^5 - 3^4) = 216$$

**۸۷ راه حل اول** ابتدا توجه کنید که  $q = \sqrt[3]{3}$ . مجموع شش جمله دوم برابر اختلاف

مجموع دوازده جمله اول و شش جمله اول است. پس

$$\frac{S_{12} - S_6}{S_6} = \frac{S_{12}}{S_6} - 1 = \frac{1 \times (q^{12} - 1)}{q - 1} - 1 = \frac{q^{12} - 1}{q^6 - 1} - 1 = q^6 = (\sqrt[3]{3})^6 = 9$$

**۸۸ راه حل اول** توجه کنید که

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$$

در نتیجه  $a_n^2 = 2^{2n-2} = 4^{n-1}$ . بنابراین

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 4^0 + 4^1 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

**۸۹ راه حل اول** فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به صورت  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$

باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با  $S_{2n} = \frac{a_1(q^{2n} - 1)}{q - 1}$ .

طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به صورت  $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$  هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $q^2$  و جمله اول  $a_2$  تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر

$$\frac{a_2(1 - (q^2)^n)}{1 - q^2}$$
 است. پس

$$\frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = 3 \times \frac{a_2(1 - q^{2n})}{(1 - q)(1 + q)} \Rightarrow a_1 = 3 \times \frac{a_2 q}{1 + q} \Rightarrow 3q = 1 + q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

**راه حل دوم** فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲ تا باشد، یعنی دنباله به صورت

$a_1, a_2$  باشد. طبق فرض  $a_1 + a_2 = 3a_2$ . بنابراین

$$a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_1 = 2a_2 q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

**۹۰ راه حل اول** صورت کسر مجموع دوازده جمله نخست دنباله‌ای هندسی با جمله اول

۱ و قدرنسبت  $t$  و مخرج کسر مجموع چهار جمله نخست دنباله‌ای هندسی با جمله اول

۱ و قدرنسبت  $t^3$  است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1 \times \frac{1-t^{12}}{1-t}}{1-t^3} = \frac{1-t^{12}}{1-t} = 1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای  $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  می‌شود

$$1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{4+2-2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 3-\sqrt{5}$$

**راه حل دوم** کافی است  $n=1$  را در نظر بگیریم و نسبت جمله اول دنباله اول به جمله اول دنباله دوم را به دست آوریم که ۱ می‌شود. فقط مقدار گزینه (۲) به ازای  $n=1$  برابر ۱ است.

**۷۹ راه حل اول** ابتدا توجه کنید که چون دنباله مورد نظر غیر ثابت است، پس  $q \neq 1$  و چون جمله‌های آن مثبت‌اند، پس  $q$  مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_6 = 21S_7 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21 \times \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} \Rightarrow 1-q^6 = 21(1-q^7)$$

$$(1-q^7)(1+q^7+q^{14}) = 21(1-q^7) \Rightarrow q^{14} + q^7 - 20 = 0$$

$$(q^7 - 4)(q^7 + 5) = 0 \Rightarrow q^7 = 4 \Rightarrow q = 2$$

**۸۰ راه حل اول** توجه کنید که

$$\begin{cases} S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} & S_{10} = \frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1} = 33 \\ S_5 = \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} & S_5 = \frac{a_1(q^5-1)}{q-1} \end{cases}$$

$$33 = \frac{q^{10}-1}{q^5-1} = q^5 + 1 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

در نتیجه

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 = 16$$

**۸۱ راه حل اول** توجه کنید که

$$a_7 + a_{14} = a_1 + 6d + a_1 + 13d = 2a_1 + 19d = 60$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10 \times 60 = 600$$

**راه حل دوم** چون  $7+14=1+20$ . پس  $a_7 + a_{14} = a_1 + a_{20}$ . بنابراین

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10 \times 60 = 600$$

**۸۲ قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جمله اول آن ۳ است.** پس مجموع  $n$  جمله

اول آن برابر است با  $S_n = \frac{n}{2}(2 \times 3 + 4(n-1)) = n(2n+1) = 2n^2 + n$

$$2n^2 + n > 300 \Rightarrow 2n^2 + n - 300 > 0$$

بنابراین

می‌توان نامعادله فوق را حل کرد که جواب آن به صورت  $n > \frac{-1 + \sqrt{12401}}{4} = 12$

می‌شود، یعنی  $n \geq 13$ .

**۸۳ راه حل اول** قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با  $a_2 - a_1 = 4$ . از طرف دیگر،

$$S_n - a_n = 56 \Rightarrow \frac{n}{2}(-14 + 4(n-1)) - (-7 + 4(n-1)) = 56$$

$$-7n + 2n(n-1) + 7 - 4(n-1) = 56$$

$$2n^2 - 13n - 45 = 0 \Rightarrow (2n+5)(n-9) = 0 \Rightarrow n = 9$$

**راه حل دوم** توجه کنید که  $d = a_2 - a_1 = 4$ . از طرف دیگر،  $S_n - a_n = S_{n-1} = 56$ .

بنابراین

$$\frac{n-1}{2}(2a_1 + (n-2)d) = 56 \Rightarrow \frac{n-1}{2}(2(-7) + 4(n-2)) = 56$$

$$(n-1)(2n-11) = 56 \Rightarrow 2n^2 - 13n - 45 = 0$$

$$(2n+5)(n-9) = 0 \Rightarrow n = 9$$

**۸۴ مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر را حساب می‌کنیم:**

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 10 + 80$$

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 90$$

با توجه به تساوی  $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$  به دست می‌آید

$$(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = 90 \Rightarrow 3(a_1 + a_n) = 90 \Rightarrow a_1 + a_n = 30$$

از طرف دیگر،  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 30 \Rightarrow 30 \times \frac{n}{2} = 300 \Rightarrow n = 20$ .

۹۸ راه‌حل اول مجموع پنج جمله دوم برابر اختلاف مجموع ده جمله اول

و مجموع پنج جمله اول است. پس

$$S_{10} = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \Rightarrow \frac{2}{3}S_{10} = \frac{1}{3}S_5 \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2}S_5$$

$$\frac{1}{2}(2a_1 + 9d) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 2a_1 + 9d = 5a_1 + 10d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

بنابراین **راه‌حل دوم** با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$3(a_1 + a_2 + \dots + a_5) = a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$$

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_5) = (a_6 - a_1) + (a_7 - a_2) + \dots + (a_{10} - a_5)$$

$$2 \left( \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \right) = 5d + 5d + 5d + 5d + 5d$$

$$10a_1 + 20d = 25d \Rightarrow 5d = 10a_1 \Rightarrow d = 2a_1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۹۹ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته است، برای نوشتن

نوزده دسته نخست از  $1 + 2 + 3 + \dots + 19$  عدد استفاده شده است. چون

$$1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

پس برای نوشتن نوزده دسته نخست، از  $190$  عدد طبیعی نخست استفاده شده است.

در نتیجه، جمله نخست دسته بیستم برابر با  $191$  است. بنابراین عددهای دسته بیستم،

دنباله‌ای حسابی با جمله نخست  $191$  و قدرنسبت  $1$  تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها  $20$  تا

است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با  $10 \times 40 = 400 = 10 \times 40 = 10 \times (20 \times 1 + (20 - 1) \times 1)$ .

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۰۰ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جمله اول  $1$  و

قدرنسبت  $-t$  و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جمله اول  $1$  و

قدرنسبت  $-t^3$  است. بنابراین

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + t^8 = \frac{a_1(q^9 - 1)}{q - 1} = \frac{1 - (-t)^9}{1 - (-t)} = \frac{1 + t^9}{1 + t}$$

$$1 - t^3 + t^6 = \frac{1 - (-t^3)^7}{1 + t^3} = \frac{1 + t^{21}}{1 + t^3}$$

در نتیجه

$$\frac{1 + t^9}{1 + t} - t^3 + t^6 = \frac{1 + t^9}{1 + t^3} \Rightarrow \frac{1 + t^9}{1 + t} = \frac{1 + t^9}{1 + t^3} + t^3 - t^6$$

پس حاصل عبارت مورد نظر به‌ازای  $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$  برابر است با

$$1 - \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{4 - 2 - 2\sqrt{17} + 18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۱ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جمله قبل، دو واحد کمتر است، پس

هشت جمله اول برابر است با

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, & a_2 &= 2 \times 3 - 2 = 4, & a_3 &= 2 \times 4 - 2 = 6 \\ a_4 &= 2 \times 6 - 2 = 10, & a_5 &= 2 \times 10 - 2 = 18, & a_6 &= 2 \times 18 - 2 = 34 \\ a_7 &= 2 \times 34 - 2 = 66, & a_8 &= 2 \times 66 - 2 = 130 \end{aligned}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

$$\therefore a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

۹۱ با استفاده از رابطه  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  و جمله اول  $a_1 = 1$ ، جمله هشتم

را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3, \quad a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, \quad a_4 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \times 15 + 1 = 31, \quad a_6 = 2 \times 31 + 1 = 63$$

$$a_7 = 2 \times 63 + 1 = 127, \quad a_8 = 2 \times 127 + 1 = 255$$

تجربی - ۹۲

۹۲ عدد  $4\sqrt{2}$  واسطه هندسی  $2^a$  و  $2^b$  است. پس  
 $(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5$

ریاضی - ۸۷

واسطه حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{a+b}{2}$ ، یعنی  $\frac{5}{2} = \frac{2}{5}$  است.

۹۳ طبق فرض.

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 15, a_{10} = 10 \Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{5}{2}$$

$$d = \frac{a_{21} - a_{10}}{21 - 10} \Rightarrow a_{21} = a_{10} + 11d = 10 + 11 \left( \frac{5}{2} \right) = \frac{75}{2} = 37 \frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۹۴ جملات رابطه صورت  $a, a+3d, a+10d$  در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2 = a(a+10d) \Rightarrow a^2 + 9d^2 + 6ad = a^2 + 10ad$$

$$9d^2 = 4ad \Rightarrow d = \frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنباله هندسی  $a, \frac{4}{9}a, \frac{49}{9}a$  هستند و قدرنسبت این دنباله برابر

$$\text{است با } r = \frac{\frac{4}{9}a}{a} = \frac{4}{9}$$

تجربی - ۹۲

۹۵ جملات  $a_4, a_5, a_6$  از دنباله حسابی، دنباله هندسی تشکیل

می‌دهند، پس جمله ششم واسطه هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2 = a_4 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2$$

$$4a_1d = -8d^2 \Rightarrow a_1 = -2d$$

ریاضی - ۸۱

$$\therefore r = \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = 3$$

بنابراین **۹۶** بنابر فرض‌های مسئله.

$$a_1 + a_7 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1q^6 = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^6) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q^2 + 1}$$

$$S_7 = \frac{a_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{q^7 - 1}{(q^2 + 1)(q - 1)} = \frac{(q^2 + 1)(q - 1)(q + 1)}{(q^2 + 1)(q - 1)} = q + 1 = 3$$

$$q = 2, a_1 = \frac{1}{5}$$

ریاضی - ۸۸

$$\therefore S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{5}(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{63}{5} = 12 \frac{3}{5}$$

بنابر فرض مسئله.

$$S_{10} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{2}{3}(2a_1 + 9d) = 3 \times \frac{12}{3}(2a_1 + 11d)$$

$$2 \times a_1 + 9d = 36a_1 + 118d \Rightarrow 16a_1 = -11d \Rightarrow d = -2a_1$$

از طرف دیگر.

$$a_7 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow a_1 - 4a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2, d = 4$$

ریاضی - ۹۰

$$\therefore a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9 \times 4 = 34$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_1 + a_p + a_p + a_p + \dots + a_p + a_p = 285$$

$$\frac{2}{3} (2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۰۸ ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته است، برای نوشتن

۲۹ دسته نخست از ۱+۲+۳+...+۲۹ عدد استفاده شده است. پس

$$1+2+3+\dots+29 = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

پس برای نوشتن ۲۹ دسته نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جمله اول دسته سی‌ام، ۴۳۶ امین عدد فرد و جمله آخر آن (۴۳۶+۲۹) امین عدد فرد

است. از طرف دیگر، جمله عمومی عددهای فرد به صورت  $a_n = 2n - 1$  است. پس

$$a_{435} + a_{436} = 2(435) - 1 + 2(436) - 1 = 2(435 + 436 - 1) = 2(870) = 1740$$

تجربی - ۹۴

۱۰۹ ۳ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به صورت  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  باشند. در این

صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با  $S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$ . از طرف دیگر جمله‌های با

ردیف فرد به صورت  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$  هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت  $q^2$  و

جمله اول  $a_1$  است. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با  $\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$  است. بنابراین

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q = 2$$

ریاضی - ۹۴

۱۱۰ ۱ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جمله اول ۱ و

قدرنسبت  $t$  و مخراج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت

$t^3$  است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1 \times \frac{1-t^{12}}{1-t}}{1-t^3} = \frac{1-t^{12}}{(1-t)(1+t+t^2)} = \frac{1-t^{12}}{1-t^3} = 1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای  $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  می‌شود

$$1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+2\sqrt{5}}{4} = \frac{4-2+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 2$$

ریاضی - ۹۳

۱۱۱ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که  $x < 0$ .

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{(-x)x^4} = \sqrt[4]{-x} \times \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{-x} \times |x| = -x \sqrt[4]{-x}$$

راه‌حل دوم چون  $x < 0$ ، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای  $x = -1$  می‌یابیم:

$$\sqrt[4]{-x^5} = \sqrt[4]{1} = 1$$

فقط مقدار گزینه (۳) به ازای  $x = -1$  برابر ۱ است.

توجه کنید که

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{2^5 \times 3} = \sqrt[4]{2^4 \times 2 \times 3} = 2\sqrt[4]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[4]{81}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{3 \times \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3}} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{3} = \sqrt[4]{3}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با  $\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = -2\sqrt[4]{3}$

۱۰۲ ۴ شرط اینکه سه عدد  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند

این است که  $2b = a + c$ . بنابراین  $2(3p+4) = (2p+3) + (5p-1) \Rightarrow p = 6$

$$d = 3p + 4 - 2p - 3 = p + 1 \xrightarrow{p=6} d = 7$$

ریاضی - ۸۴

۱۰۳ ۲ سه جمله را به صورت  $\frac{a}{r}, a, ar$  فرض می‌کنیم. در این صورت

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \Rightarrow \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19 \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$(3r-2)(2r-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی } 9, 6, 4 \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{سه جمله متوالی } 4, 6, 9 \end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

توجه کنید که

$$a_0^2 = a_1 a_1 \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d \Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \Rightarrow a_1 = 8d$$

$$a_0 = a_1 + 4d = 12d, a_{11} = a_1 + 10d = 18d \Rightarrow r = \frac{a_{11}}{a_0} = \frac{18d}{12d} = \frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۵ ۲ فرض کنید  $t_1, t_2, t_3$  جملات دنباله حسابی  $a_1, a_2, a_3$  و

جملات متوالی دنباله هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow t_2^2 = t_1 t_3 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 8dt_1 + 24d^2$$

$$4t_1 d + 12d^2 = 0 \Rightarrow 2d(t_1 + 3d) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} t_1 + 3d = 0$$

بنابراین جمله یازدهم دنباله حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۰۶ ۴ بنابر فرض مسئله،  $S_5 = 153 \Rightarrow 136S_6 = 153S_7$

$$136a_1 \left( \frac{q^6-1}{q-1} \right) = 153a_1 \left( \frac{q^7-1}{q-1} \right) \Rightarrow 136(q^6-1)(q^7+1) = 153(q^7-1)$$

$$136(q^7+1) = 153 \Rightarrow q^7 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = a_1 q^4 = \frac{1}{16} a_1 \Rightarrow a_1 = 16a_0$$

بنابراین

ریاضی - ۸۹

۱۰۷ ۱ راه‌حل اول به بیست جمله اول دنباله توجه کنید:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + 18d, a_1 + 19d$$

جملات ردیف فرد یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $2d$  تشکیل می‌دهند

و جملات ردیف زوج یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 + d$  و قدرنسبت  $2d$  تشکیل

می‌دهند. پس

$$\begin{cases} S_{\text{فردها}} = \frac{10}{2} (a_1 + a_1 + 18d) = 135 \\ S_{\text{زوجها}} = \frac{10}{2} (a_1 + d + a_1 + 19d) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 150 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

راه‌حل دوم طبق فرض،

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{19} - a_{18}) = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$